

为简单起见, 式(2-3)中最右边矩阵内的前置上标被省略了。事实上, 只要点积的各对矢量是在同一个坐标系中描述的, 那么坐标系的选择可以是任意的。由两个单位矢量的点积可得到二者之间夹角的余弦, 因此你就可以明白为什么旋转矩阵的各分量常被称作方向余弦了。

进一步观察式(2-3), 可以看出矩阵的行是单位矢量 $\{A\}$ 在 $\{B\}$ 中的表达; 即,

$${}^A_B R = [{}^A\hat{X}_B \ {}^A\hat{Y}_B \ {}^A\hat{Z}_B] = \begin{bmatrix} {}^B\hat{X}_A^T \\ {}^B\hat{Y}_A^T \\ {}^B\hat{Z}_A^T \end{bmatrix} \quad (2-4)$$

因此, ${}^B_A R$ 为坐标系 $\{A\}$ 相对于 $\{B\}$ 的描述, 可由式(2-3)的转置得到; 即,

$${}^B_A R = {}^A_B R^T \quad (2-5)$$

这表明旋转矩阵的逆矩阵等于它的转置, 可以简单证明如下:

$${}^A_B R^T {}^A_B R = \begin{bmatrix} {}^A\hat{X}_B^T \\ {}^A\hat{Y}_B^T \\ {}^A\hat{Z}_B^T \end{bmatrix} [{}^A\hat{X}_B \ {}^A\hat{Y}_B \ {}^A\hat{Z}_B] = I_3 \quad (2-6)$$

其中, I_3 是 3×3 的单位矩阵。因此,

$${}^A_B R = {}^B_A R^{-1} = {}^B_A R^T \quad (2-7)$$

实际上, 由线性代数[1], 我们知道一个正交阵的逆等于它的转置。我们已经在几何上证明了这一点。

坐标系的描述

完整描述图2-2中的操作手位姿所需的信息为位置和姿态。我们可在物体上任选一点描述其位置, 为方便起见, 将其作为连体坐标系的原点。在机器人学中, 位置和姿态经常成对出现, 于是我们将此组合称作坐标系, 四个矢量为一组, 表示了位置和姿态信息。例如, 在图2-2中, 一个矢量表示指端位置, 而另外三个矢量表示姿态。一个坐标系可以等价地用一个位置矢量和一个旋转矩阵来描述。注意到参考系是一个坐标系, 在这个坐标系中除了姿态, 还有一个位置矢量, 它可以确定这个坐标系的原点相对于其他嵌入坐标系的位置。例如, 用 ${}^A_B R$ 和 ${}^A P_{BORG}$ 来描述坐标系 $\{B\}$, 其中 ${}^A P_{BORG}$ 是确定坐标系 $\{B\}$ 的原点的位置矢量:

$$\{B\} = \{{}^A_B R, {}^A P_{BORG}\} \quad (2-8)$$

在图2-3中, 在世界坐标系中有三个坐标系。已知坐标系 $\{A\}$ 和 $\{B\}$ 相对于世界坐标系的关系以及坐标系 $\{C\}$ 相对于坐标系 $\{A\}$ 的关系。

在图2-3中, 我们引入坐标系的图形表示, 以便于用图示说明坐标系。坐标系可用三个标有箭头的单位矢量定义的坐标系的主轴来描述。从原点到另一点的箭头表示了一个矢量。这个矢量表示了箭头处的原点相对于箭尾所在坐标系的位置。例如在图2-3中, 箭头方向表示 $\{C\}$ 相对于 $\{A\}$ 的关系而不是 $\{A\}$ 相对于 $\{C\}$ 的关系。

总之, 一个参考系可以用一个坐标系相对于另一坐标系的关系来描述。参考系包括了位